محمد بن موسیٰ خوارزمی

ابو عبد اللہ ، محمد بن موسی خوارزمی[8][9][10] ایک عالم ریاضیات ، فلکیات اور جغرافیہ کے ماہر مسلمان تھے۔ [11][12][13]ان کی کنیت ابو جعفر تھی۔ کہا جاتا ہے کہ وہ تقریباً 164ھ / 781ء میں پیدا ہوئے اور کچھ اقوال کے مطابق 232ھ / 847ء کے بعد وفات پائی۔ خوارزمی مسلمانوں کے ابتدائی ریاضی دانوں میں شمار ہوتے ہیں اور ان کے کام نے اپنے دور میں ریاضیات کی ترقی میں بہت بڑا کردار ادا کیا۔[14] انھوں نے خلیفہ عباسی المامون سے رابطہ قائم کیا اور بغداد کے بیت الحکمت میں کام کیا۔ خلیفہ نے ان پر اعتماد کیا اور انھیں بیت الحکمت کا انتظام سونپا، نیز انھیں زمین کا نقشہ تیار کرنے کا حکم دیا، جس میں انھوں نے ستر سے زیادہ جغرافی دانوں کے ساتھ کام کیا۔ خوارزمی وفات سے پہلے 232ھ / 850ء میں، انھوں نے ریاضیات ، فلکیات اور جغرافیہ میں کئی اہم تصانیف مرتب کیں، جن میں سب سے مشہور کتاب المختصر فی حساب الجبر والمقابلہ ہے، جو ان کی سب سے بڑی اور معروف کتاب سمجھی جاتی ہے۔

اس کتاب کو لاطینی زبان میں عالم روبرٹ تشستری نے تقریباً سال 1145ء میں ترجمہ کیا۔ اس کے نتیجے میں کچھ نئے الفاظ بھی لاطینی زبان میں شامل ہوئے، جیسے: الجبرا (Algebra) اور صفر (Zero)۔ کچھ عرصہ بعد اسے ژرار کرمونایی نے طلیطلہ میں ترجمہ کیا اور اس کے بعد اطالوی غیوم دی لونا نے تیسرا ترجمہ کیا۔ روبرٹ تشستری کا ترجمہ تقریباً صدی 16 تک یورپی جامعات میں ریاضیات کی تعلیمات کے لیے بنیادی کتاب کے طور پر استعمال ہوتا رہا۔

خوارزمی کے مؤلفات میں شامل ہیں: کتاب الجمع والتفریق فی الحساب الهندی (ہندوی حساب میں جمع اور تفریق) کتاب رسم الربع المعمور (مربع آباد کی نقشہ سازی) کتاب تقویم البلدان (ممالک کی جدول بندی) کتاب العمل بالاسطرلاب (اسطرلاب کے استعمال کی کتاب) کتاب «صورة الأرض» (زمین کی تصویر)، جس میں اس نے بطلیموس کی کتاب المجسطی پر انحصار کیا اور اس میں اضافے، وضاحتیں اور حواشی شامل کیں ہندوی فلکیات کی مشہور کتاب «السند ہند الکبیر» کو دوبارہ تحریر کیا، جو خلافت منصور کے زمانے میں عربی میں ترجمہ ہوئی تھی؛ اس نے اس میں اضافہ کیا اور اسے «السند ہند الصغیر» کے نام سے شائع کیا۔

خوارزمی نے کتاب المختصر فی حساب الجبر والمقابلہ میں خطی مساوات اور مربع مساوات کے لیے پہلا منظم حل پیش کیا، جس میں اس نے مربع مکمل کرنے کے طریقہ کار کا استعمال کیا۔ اسے علم الجبر کا مؤسس مانا جاتا ہے (یہ لقب اس نے دیوفانتوس کے ساتھ مشترک ہے) اور بارہویں صدی میں اس کی جبر کی تعلیمات کی لاطینی ترجمے کے ذریعے ہندی اعداد اور دس اعشاری نظام کو مغربی دنیا میں متعارف کرایا گیا۔[15]خوارزمی نے جغرافیا کی کتاب (لکلاڈیوس بطلیموس) کو بھی منقح کیا اور فلکیات و نجوم پر متعدد کتب تحریر کیں۔

محمد بن موسیٰ خوارزمی

(عربی میں: أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي)



معلومات شخصیت

پیدائشی نام	(عربی میں: محمد بن موسى الخوارزمي)
پیدائش	سنہ 780ء [1][2][3] خوارزم [4]
وفات	سنہ 850ء (69–70 سال)[1][2] بغداد [5][2]
رہائش	بغداد

عملی زندگی

پیشہ	ریاضی دان [6]، ماہر فلکیات [6]، جغرافیہ دان ، فلسفی ، مترجم ، مورخ

اس کے اثرات زبان پر بھی نمایاں ہیں۔ لفظ «الجبرا» ان دو عملیات میں سے ایک ہے جو مربع مساوات کے حل میں استعمال ہوئی۔ انگریزی میں Algorism اور algorithm دونوں الفاظ اس کے لاطینی نام Algoritmi سے ماخوذ ہیں۔[16] اسی طرح اس کا نام ہسپانوی میں guarismo اور پرتگالی میں algarismo کے لیے بنیاد ہے، دونوں کا مطلب «عدد» ہے۔[17]

پیشہ ورانہ زبان	فارسی ، عربی [7]
شعبۂ عمل	فلکیات ، ریاضی ، الجبرا ، ہندی اعداد ، حساب ، مثلثیات ، جغرافیہ ، زمینیات
ملازمت	بیت الحکمت
کارہائے نمایاں	الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة

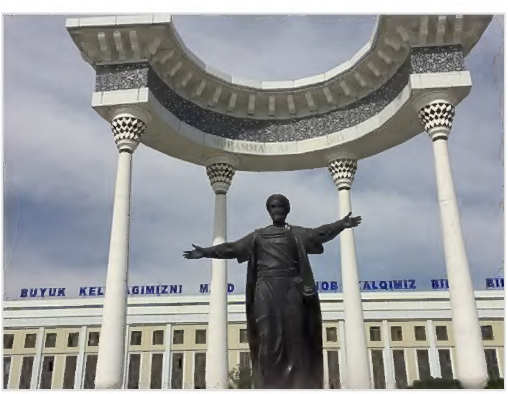
درستی - https://ur.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%AD%D9%85%D8%AF_%D8%A8%D9%86_%D9%85%D9%88%D8%B3%DB%8C%D9%B0_%D8%AE%D9%88%D8%A7%D8%B1%D8%B2%D9%85%DB%8C&action=edit&section=0
ترمیم - https://ur.wikipedia.org/w/index.php?title=%D9%85%D8%AD%D9%85%D8%AF_%D8%A8%D9%86_%D9%85%D9%88%D8%B3%DB%8C%D9%B0_%D8%AE%D9%88%D8%A7%D8%B1%D8%B2%D9%85%DB%8C&veaction=edit

حالات حیات

اس کا خاندان خوارزم شہر سے آیا، جو اسلامی خراسان میں واقع تھا اور آج کی دور میں خیوا، ازبکستان میں موجود ہے۔ کچھ روایات کے مطابق اس خاندان کا تعلق بغداد کی محلہ خوارزمیہ سے بھی بتایا جاتا ہے، جو محلہ کاظمیہ کے مغرب میں زراعتی علاقے قطربل میں واقع تھی۔ مؤرخ طبری اسے خوارزمی قطربلی کے نام سے یاد کرتا ہے، یعنی وہ شخص جو قطربل کے علاقے سے تعلق رکھتا ہو۔ خوارزمی نے اپنی زیادہ تر تحقیقات 813ء–833ء کے دوران بغداد میں دار الحکمت میں کی، جسے خلیفہ المامون نے قائم کیا تھا۔ المامون نے اسے اپنے کتب خانے کے سربراہ مقرر کیا اور اسے ہدایت دی کہ وہ یونانی اور دیگر زبانوں کی کتابوں کا ترجمہ کرے۔ خوارزمی نے اس خزانۂ علم سے استفادہ کیا اور ریاضی، فلکیات ، جغرافیہ، تاریخ اور یونانی و ہندی علوم کا مطالعہ کیا۔ اس نے اپنی تمام تصانیف عربی زبان میں لکھیں، جو اس دور کی علمی زبان تھی۔ طبری اپنے تاریخ میں اسے محمد بن موسی خوارزمی قطربلی لکھتے ہیں۔ ان کی مشہور تصنیف کتاب الجبر والمقابلہ کی ابتدا بسم اللہ الرحمن الرحیم سے ہوئی۔

اگرچہ تاریخی اور علمی منابع میں اس کی قومیت پر اتفاق نہیں ہے، لیکن: موسوعہ بریٹانیکا (نسخہ طلاب الأطفال)، موسوعہ مائیکروسافٹ انکارٹا، موسوعہ یونیورسٹی آف کولمبیا[18][19][20][21] ان کے مطابق وہ عربی تھا، جبکہ دیگر منابع اسے فارسی یا ترک کہتے ہیں۔.[22][23][24][25] عمومی بریٹانیکا میں اسے محض عالم مسلم کہا گیا ہے۔ خوارزمی نے بغداد کو اسلامی علوم اور تجارتی مرکز پایا، جہاں مختلف علاقوں سے علما اور تاجروں کا آنا معمول تھا، جیسا کہ خود وہ بھی آیا۔[26] اس نے دار الحکمت میں تحقیق اور تدریس کے ساتھ یونانی اور سنسکرت کی سائنسی مخطوطات کا ترجمہ کیا اور ریاضی، فلکیات اور جغرافیہ میں نمایاں خدمات انجام دیں۔

آپ کی علمی خدمات



خوارزمی کا مجسمہ، جرجانیہ، ازبکستان۔

خوارزمی نے ریاضیات، جغرافیہ، فلکیات اور نقشہ سازی میں نمایاں کردار ادا کیا۔ اس نے الجبرا اور مثلثات کے شعبوں میں بنیاد رکھی۔ مساواتِ خطی اور مساواتِ تربیعی کے حل کے لیے اس کا منہجی انداز الجبرا کی ترقی کا سبب بنا اور لفظ "الجبر" اسی کی کتاب کے عنوان سے ماخوذ ہے، جس کا نام تھا المختصر فی حساب الجبر والمقابلہ ۔

سنہ 825ء میں اس نے کتاب الجمع والتفریق بحساب الہند لکھی، جس کے ذریعے ہندی عددی نظام کی نشر و اشاعت مشرق وسطیٰ اور یورپ میں ہوئی۔

لفظ "خوارزم" کا ترجمہ لاطینی میں Algoritmi de numero Indorum ہوا۔ اسی کے لقب "الخوارزمی" سے لاطینی لفظ Algoritmi بنا، جو بعد میں اصطلاح «الخوارزمیہ» یعنی الگوردم کی بنیاد بنی۔

خوارزمی نے بطلیموس کے افریقہ اور مشرق وسطیٰ کے بارے میں اعداد و شمار کو بھی منظم اور درست کیا۔ اس کی اہم تصانیف میں سے ایک کتاب «صورة الأرض» ہے، جس میں وہ مقامات کے نقاطِ نصفِ بلد (coordinates) پیش کرتا ہے جو بطلیموس کی جغرافیا پر مبنی ہیں، لیکن اس نے بحیرہ روم، ایشیا اور افریقہ کے لیے بہتر قدریں فراہم کیں۔ اس کے علاوہ اس نے فلکیاتی آلات جیسے أسطرلاب اور مزولة پر بھی لکھا۔

اس نے زمین کے محیط (circumference) کے تعین کے منصوبے میں مدد کی اور خلافت عباسیہ کے دورِ مامون میں دنیا کا نقشہ بنانے کے کام میں حصہ لیا، جس کے لیے اُس نے 70 جغرافیہ دانوں کی نگرانی کی۔[27]

بارہویں صدی میں اس کے کام یورپ میں لاطینی تراجم کے ذریعے پھیل گئے، جن کا یورپی ریاضی کی ترقی پر گہرا اثر ہوا۔

الجبرا



صفحہ المختصر فی حساب الجبر والمقابلہ سے

یہ کتاب المختصر فی حساب الجبر والمقابلہ تقریباً سال 830ء میں تصنیف کی گئی تھی۔ اس کتاب میں بیان کی گئی بنیادی عملیات میں سے ایک کے نام سے ہی لفظ جبر وجود میں آیا، جو معادلات کے حل کے طریقوں کی وضاحت کرتا ہے۔ اس کتاب کو لاطینی میں "Liber algebrae et almucabala" کے عنوان سے روبرٹ تشستری نے ترجمہ کیا (سیگوفیا، 1145) اور بعد میں جیرارڈ آف کریمونا نے بھی ترجمہ کیا۔ اس کا ایک منفرد عربی نسخہ آکسفورڈ میں محفوظ ہے، جس کا ترجمہ ایف. روزین نے 1831 میں کیا، جبکہ کیمبرج میں اس کتاب کا ایک لاطینی ترجمہ بھی محفوظ ہے۔[28]

الجبرا کو جدید الجبرا کی بنیاد سمجھا جاتا ہے۔ اس نے دوسرے درجے تک کی کثیرالحد معادلات کے حل کے لیے جامع بیان پیش کیا[29] اور «الحد» اور «التوازن» کے بنیادی طریقے متعارف کروائے، جن کا مطلب ہے کہ معادلہ کے ایک طرف سے کسی اصطلاح کو دوسرے طرف منتقل کرنا، یعنی دونوں اطراف پر موجود یکساں اصطلاحات کو ختم کرنا۔[30]

مذکورہ بالا بحث میں جدید ریاضیاتی علامات استعمال کی گئی ہیں تاکہ کتاب میں زیرِ بحث مسائل کو ظاہر کیا جا سکے۔ تاہم، خوارزمی کے زمانے میں زیادہ تر یہ علامات موجود نہیں تھیں، اس لیے انھیں مسائل اور ان کے حل پیش کرنے کے لیے عام متنی انداز استعمال کرنا پڑا۔ مثال کے طور پر، ایک مسئلے کے لیے، (1831 کی ترجمہ سے) یوں لکھا گیا تھا۔

یہ متن خوارزمی کے انداز کی ایک مثال ہے، جس میں اس نے جبر کو لفظی انداز میں بیان کیا کیونکہ اُس وقت جدید ریاضیاتی علامات موجود نہیں تھیں۔ اسے آسان اردو میں یوں بیان کیا جا سکتا ہے:فرض کریں کہ آپ کے پاس عدد 10 ہے اور آپ اسے دو حصوں میں تقسیم کرنا چاہتے ہیں۔ ایک حصہ کو اس کے آپس میں ضرب دیں، تو نتیجہ دوسرے حصے کے برابر آتا ہے اور یہ ایک خاص عدد (81) کے برابر ہے۔ خوارزمی نے قدم بہ قدم حل اس طرح بیان کیا:فرض کریں ایک حصہ کم ہے، دوسرے حصہ زیادہ۔ کم حصہ کو خود سے ضرب دیں اور اس کے ساتھ حساب کریں کہ یہ 81 کے برابر ہو۔ مساوات کو لفظی اور حسابی طریقے سے حل کریں۔ آخر میں دونوں حصے معلوم ہوتے ہیں: ایک حصہ 1 اور دوسرا 9 (کیونکہ 1 + 9 = 10)۔

جدید ریاضیاتی علامتوں کے استعمال سے، اس عمل کو x («شے» یا «جذر») کے ذریعے درج ذیل مراحل میں دکھایا جا سکتا ہے:

$$(10-x)^2 = 81x$$

$$100 + x^2 - 20x = 81x$$

$$x^2 + 100 = 101x$$

"معادلے کے جزر کو اس طرح فرض کریں کہ..." p = x و q = x. ثم $\frac{p+q}{2} = 50\frac{1}{2}$, $pq = 100$ و:

"اس لیے جزر کو اس طرح دیا جاتا ہے:": $\frac{p-q}{2} = \sqrt{\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq} = \sqrt{2550\frac{1}{4} - 100} = 49\frac{1}{2}$

$$x = 50\frac{1}{2} - 49\frac{1}{2} = 1$$

سوئس امریکی ماہر ریاضیات فلوریان کاجوری کے مطابق، خوارزمی کا علمِ الجبر ہندی ریاضی دانوں کے کام سے مختلف تھا، کیونکہ ہندیوں کے پاس «ترمیم» اور «تقلیل» جیسے قواعد موجود نہیں تھے۔[31] کارل بنجامین بوئیر نے خوارزمی کے الجبری کام اور ہندی ریاضی دان براہماغوبتا کے کام میں فرق اور اہمیت کے بارے میں لکھا: "یہ بعید ہے کہ خوارزمی دیوفانتوس کے کام سے واقف تھا، لیکن اس نے کم از کم براہماغوبتا کے فلکیاتی اور حسابی حصوں سے واقفیت حاصل کی ہوگی؛ تاہم، نہ خوارزمی اور نہ عربی ریاضی دان منفی اعداد یا نشوینی علامات استعمال کرتے تھے۔" اس کے باوجود، الخوارزمی کا الجبر آج کے ابتدائی الجبر کے قریب ہے جو دیوفانتوس یا براہماغوبتا کے کاموں سے ملتا ہے، کیونکہ اس کتاب میں غیر محدود تجزیاتی مسائل پر توجہ نہیں دی گئی، بلکہ براہِ راست اور ابتدائی طریقۂ حل پیش کیا گیا، خاص طور پر دوسری ڈگری کے مساوات کے لیے۔ عرب عموماً ایک واضح دلیل پسند کرتے تھے جو مفروضے سے لے کر نتیجہ تک سیدھی اور منظم ہو اور یہ منظم انداز دیوفانتوس یا ہندو ریاضی دانوں کے کام میں نہیں پایا جاتا تھا۔[32]

خطی مساوات کے حل میں خوارزمی کا طریقہ

خوارزمی کی خطی اور مربع مساوات کے حل کی ابتدائی طریقہ کار میں مساوات کو چھ معیاری نمونوں میں سے ایک میں لایا جاتا تھا، جہاں b اور c مثبت صحیح اعداد ہوتے تھے۔

- مربع مساوات جذر کے برابر ($ax^2 = bx$)
- مربع مساوات عدد کے برابر ($ax^2 = c$)
- جذر عدد کے برابر ($bx = c$)
- مربع اور جذر عدد کے برابر ($ax^2 + bx = c$)
- مربع اور عدد جذر کے برابر ($ax^2 + c = bx$)
- جذر اور عدد مربع کے برابر ($bx + c = ax^2$)

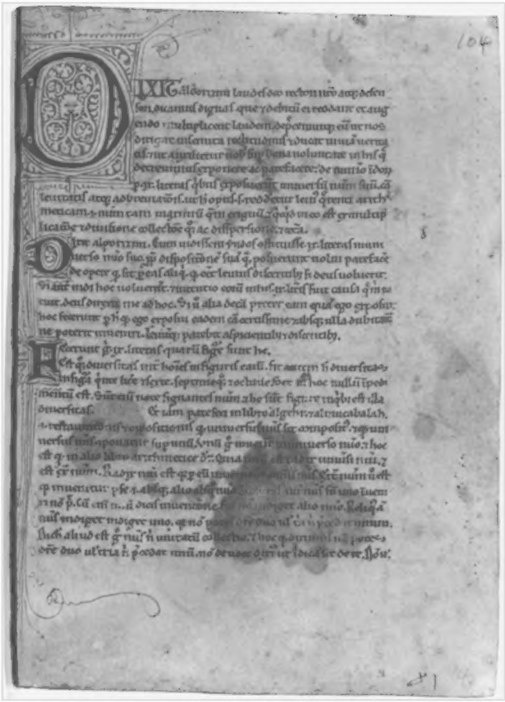
مربع کے ضریب کو تقسیم کرنے کی دو عملیاتی طریقے ہیں: الجبرا اور المقابلہ۔ الجبرا وہ عمل ہے جس میں معادلے سے واحد (x کی طاقت 1)، جذر اور منفی مربع کو ہٹایا جاتا ہے، یعنی معادلے کے دونوں اطراف میں ایک ہی مقدار شامل کر کے اسے آسان بنایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر:$x^2 = 40x - 4x^2$ تخفض إلى $5x^2 = 40x$، المقابلہ وہ عمل ہے جس میں ایک ہی نوعیت کی مقدار کو معادلے کے ایک ہی طرف لایا جاتا ہے تاکہ آسانی سے حل کیا جا سکے۔ مثال کے طور پر:$x^2 + 14 = x + 5$ تخفض إلى $x^2 + 9 = x$.

کئی دیگر مصنفین نے بھی کتاب الجبرا والمقابلہ کے نام سے کتابیں اور متون تصنیف کیں، جن میں شامل ہیں: ابو حنیفہ الدینوری ، ابو کامل شجاع بن اسلم ، عبد الحمید بن ترک ، سند بن علی ، سہل بن بشر اور شرف الدین الطوسی۔

جی۔ جی۔ اوکونر اور ای۔ ایف۔ رابرٹسن نے ویب گاہ آرکائیو آف دی ہسٹری آف میتھمیٹکس پر لکھا:

> "شاید عربی ریاضیات کی سب سے اہم پیش رفت، جو اس دور میں خوارزمی کے کام سے شروع ہوئی، الجبرا کی ابتدا تھی۔ یہ سمجھنا نہایت اہم ہے کہ یہ نیا تصور کس قدر اہم تھا۔ یہ یونانی تصورِ ریاضیات سے ایک انقلابی انحراف تھا، کیونکہ یونانی ریاضیات بنیادی طور پر ہندسہ (جیومیٹری) پر مبنی تھی۔ الجبرا ایک

متحدہ نظریہ تھا جس نے کسری اعداد، غیر کسری (غیر ناطق) اعداد، ہندسی مقداروں اور دیگر اشیاء کو اس طرح برتنے کی اجازت دی جیسے وہ سب الجبری اجسام ہوں۔ اس نے ریاضیات کو مجموعی طور پر ترقی کا ایک بالکل نیا راستہ دیا، جو پہلے موجود تصور سے کہیں زیادہ وسیع تھا اور اس علم کی آئندہ ترقی کے لیے ایک مضبوط بنیاد فراہم کی۔ الجبرا کے تصورات کے تعارف کا ایک اور اہم پہلو یہ تھا کہ اس نے ریاضیات کو خود اپنے اوپر لاگو کرنے کی اجازت دی، جو اس سے پہلے ممکن نہ تھا۔"[33]



لاطینی ترجمے کا ایک صفحہ، جس کا آغاز "algorizmi dixit" (یعنی "الخوارزمی نے کہا") سے ہوتا ہے۔

آر راشد اور اینجیلا آرمسٹرانگ لکھتے ہیں:

> خوارزمی کا متن اس لحاظ سے منفرد نظر آتا ہے کہ وہ نہ صرف بابلی ریاضیات سے مختلف ہے بلکہ دیوفانتوس کی کتاب آریثمیٹیکا سے بھی جداگانہ ہے۔ اب یہ محض چند مسائل حل کرنے کی فہرست نہیں رہی، بلکہ ایک توضیحی (تشریحی) تصنیف ہے جو ابتدائی بنیادی اصطلاحات سے آغاز کرتی ہے، جہاں ان کی ترکیبیں تمام ممکنہ اقسام کی مساواتیں پیدا کرتی ہیں اور یہی مساواتیں دراصل مطالعے کا اصل موضوع بنتی ہیں۔ دوسری طرف، خود "مساوات" کا تصور ابتدا ہی سے نمایاں طور پر سامنے آتا ہے۔ عمومی طور پر کہا جا سکتا ہے کہ یہ محض کسی خاص مسئلے کے حل کے ضمن میں ظاہر نہیں ہوتا، بلکہ واضح طور پر ایک لامحدود نوعیت کے مسائل کی پوری جماعت کی تعیین اور تعریف کی دعوت دیتا ہے۔"[34]

علم حساب

خوارزمي کا دوسرا کارنامہ علم حساب میں تھا۔ ان کا اصل عربی نسخہ ضائع ہو گیا، مگر اس کی لاطینی ترجمہ ہمیں موجود ہے۔ غالباً یہ ترجمہ بارہویں صدی میں ایڈیلار الباثی نے کیا، جس نے 1126ء میں فلکی جدولوں کا ترجمہ بھی کیا تھا۔

لاطینی مخطوطات بلا عنوان تھیں، لیکن ان کی نشان دہی پہلے دو الفاظ سے کی جاتی ہے: Dixit algorizmi (یعنی "اسی طرح خوارزمی نے کہا۔") یا Algoritmi de numero Indorum ("خوارزمی کا ہندسی حساب")۔ یہ نام 1857ء میں بالداساری بونکومبانی نے اس کام پر رکھا۔ اصل عربی عنوان شاید کتاب الجمع والطرح ووفقا للحساب الهندی تھا۔[35]

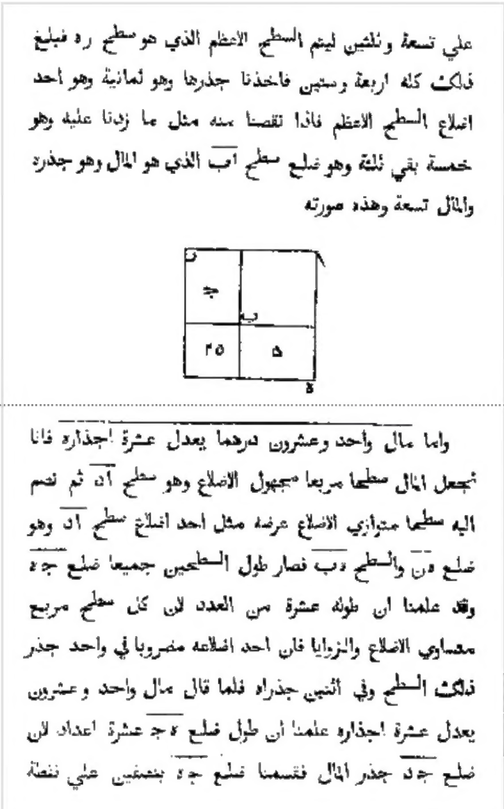
خوارزمی کے حسابی کام کا سہرا مغرب کو جاتا ہے کیونکہ انھوں نے ہندسہ–عربی اعداد کو ریاضی میں استعمال ہونے والے ترقی یافتہ ہندی–عربی نظام کی بنیاد پر متعارف کروایا، جو اعشاریہ نظام (Decimal System) پر مبنی تھا۔ اصطلاح «خوارزمیہ» (Algorithm) خوارزمی کے اس ہندی–عربی اعداد کے طریقہ کار سے ماخوذ ہے۔ دونوں الفاظ «خوارزمیہ» اور «جوریسم» (Algorism) دراصل خوارزمی کے لاطینی نام کے مختلف شکلوں Algoritmi اور Algorismi سے نکالے گئے ہیں۔

خوارزمی نے الجبرا کے موضوعات کو اعداد کے نظریہ سے الگ کرکے اور حساب کے موضوعات کے ساتھ بھی الگ طور پر مرتب کیا۔ وہ سب سے پہلے تھے جنھوں نے اعداد میں صفر متعارف کروایا تاکہ قدرتی اعداد مکمل ہوں، کیونکہ اس سے پہلے شمار قدیم طریقہ کار کے تحت ہوتا تھا جس میں صفر شامل نہیں تھا۔ صفر کے نظام کے متعارف ہونے سے جمع اور تفریق کے حسابات اعشاری نظام (Decimal System) کے مطابق ہونے لگے اور یہ نظام بعد میں یورپ اور دنیا کے دیگر حصوں میں ان کی مخطوطات کے لاطینی ترجموں کے ذریعے استعمال ہونے لگا۔

چار لاطینی متن محفوظ ہیں جو خوارزمی کے اسلوب میں ترامیم فراہم کرتے ہیں، حالانکہ یہ خیال نہیں کیا جاتا کہ یہ کسی بھی صورت میں حرف بہ حرف ترجمہ ہیں۔[36] [37]؛[38]

علم المثلثات

خوارزمی کی کتاب الزیج السندھند میں مثلثاتی افعال سائن اور کوسائن کے جدول بھی شامل تھے۔ اسی سے متعلق ایک رسالہ بھی ہے جو کروی مثلثیات (Spherical Trigonometry) کے حساب سے متعلق سمجھا جاتا ہے اور اسے بھی خوارزمی کے ساتھ منسوب کیا جاتا ہے۔ خوارزمی نے سائن اور کوسائن کے درست قدروں کے جدول تیار کیے اور اسی طرح ٹینجنٹ (Tangent) کے افعال کا جدول بھی بنایا جو اپنی نوعیت میں پہلا ہے۔[39] [33]



علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ
ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد
اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو
خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره
والمال تسعة وهذه صورته

واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا
نجعل المال سطحا مربعا مجهول الاضلاع وهو سطح اد ثم نضم
اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح اد وهو
ضلع دن والسطح دب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه
وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع
متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر
ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون
يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان
ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين على نقطة

صفحة از کتاب الجبر از محمد بن موسی الخوارزمی، ترجمہ فریدریک روزن 1831۔

یہودی کیلنڈر

خوارزمی نے کئی دیگر تصانیف بھی لکھی ہیں جن میں یہودی کیلنڈر پر ایک مقالہ شامل ہے، جس کا عنوان ہے: «رسالہ فی استخراج تاریخ الیہود» (یہودی عہد کی استخراج کی رسالہ)۔ اس میں وہ میتونی دور (19 سالہ چکر) بیان کرتا ہے اور یہ قواعد بتاتا ہے کہ مہینہ تشریہ کے پہلے دن کو ہفتے کے کس دن پر رکھا جائے، اس کے لیے دن عالم اور عصر سلوقی کے درمیان وقفہ شمار کیا جاتا ہے۔ وہ سورج اور چاند کے وسطی طول بلد (خط طول) کو یہودی کیلنڈر کے حساب سے طے کرنے کے اصول بھی دیتا ہے۔ اس کے مشابہ مواد البیرونی اور ابن میمون کے کاموں میں بھی پائے گئے ہیں۔[14]

علمِ فلکیات

"زیج السند ہند" ایک کتاب ہے جس میں تقریباً 37 ابواب شامل ہیں، جو فلکی حسابات اور تقویمی حسابات پر مشتمل ہیں، نیز 116 جدولیں ہیں جو تقویم، فلکی اور نجومی معلومات کے ساتھ ساتھ زاویہ کے جیب (سائن) کی قدروں پر مشتمل ہیں۔ یہ عربی زیجات میں سے اولین زیج ہے جو ہندی فلکیاتی طریقوں (السند ہند) پر مبنی تھی۔[14] اس کتاب میں سورج، چاند اور اس وقت کے معلوم پانچ سیاروں کی حرکات کے جدول شامل تھے۔ یہ کام اسلامی علمِ فلکیات میں ایک اہم موڑ ثابت ہوا۔ اس سے پہلے مسلمان فلکیات دان زیادہ تر دوسروں کے کاموں کے ترجمہ اور پہلے سے موجود علم کے سیکھنے تک محدود تھے، مگر خوارزمی کے اس کام نے تحقیق اور حساب کے ایک نئے اور منفرد انداز کی بنیاد رکھی۔[40]

اصل عربی نسخہ (جو 820ء میں لکھا گیا تھا) ضائع ہو چکا ہے، تاہم اندلسی ماہر فلکیات مسلمہ بن احمد مجریطی (تقریباً 1000ء) نے اس کے لاطینی ترجمے کو محفوظ کیا، جو ایڈلارڈ آف باتھ نے 26 جنوری 1126ء کو تیار کیا تھا۔ اس لاطینی ترجمے کے چار مخطوطات آج بھی موجود ہیں، جو شارتر کی عوامی لائبریری، پیرس کی مزارین لائبریری، میڈرڈ کی نیشنل لائبریری اور آکسفورڈ کی بودلیئن لائبریری میں محفوظ ہیں۔

محمد بن موسیٰ الخوارزمی نے مزولات (سورج گھڑیوں) کے نظریہ اور ساخت میں اہم اصلاحات کیں، جو انھیں ہندی اور یونانی تہذیبوں سے وراثت میں ملی تھیں۔ انھوں نے ان آلات کے لیے جدولیں تیار کیں جن سے مخصوص حسابات میں لگنے والا وقت کم ہو گیا۔ ان کی بنائی ہوئی مزولہ (سورج گھڑی) عالمگیر تھی اور اسے زمین کے کسی بھی مقام سے استعمال کیا جا سکتا تھا۔ اسی کے بعد مزولات کو مساجد میں نماز کے اوقات معلوم کرنے کے لیے کثرت سے استعمال کیا جانے لگا۔ "مربع الظل" بھی ایک آلہ ہے جسے خوارزمی نے نویں صدی میں بغداد میں ایجاد کیا اور اسے کسی جسم کی بلندی (ارتفاع) معلوم کرنے کے لیے زاویاتی مشاہدات کے ساتھ استعمال کیا جاتا تھا۔ [41] [42]



اپولو 11 مشن کے ذریعے لی گئی تصویر میں قمری گڑھا "الخوارزمی" دکھایا گیا ہے۔

خوارزمی نے بغداد میں نویں صدی عیسوی میں پہلا ربعی (Quadrant) اور بلندی ناپنے کا آلہ بھی ایجاد کیا۔ اسی طرح انھوں نے "جیب دالہ" نامی آلہ بھی ایجاد کیا جو فلکی حسابات میں استعمال ہوتا تھا۔ مزید برآں انھوں نے "ربع حراری" بھی ایجاد کیا جس کے ذریعے عرض البلد معلوم کیا جاتا تھا۔ بغداد اس زمانے میں ربعی آلات کی ترقی کا مرکز بن گیا۔ [43]. ربعی (Quadrant) ایک ہمہ گیر فلکیاتی و ریاضیاتی آلہ تھا، جس کے ذریعے سورج یا ستاروں کے مشاہدے سے وقت (خصوصاً نماز کے اوقات) معلوم کیے جاتے تھے۔ یہ آلہ بعد میں یورپ میں تیرہویں صدی میں "قدیم ربعی" (Old Quadrant) کے نام سے معروف ہوا۔ یہ آلہ زمین کے کسی بھی عرض البلد اور سال کے کسی بھی وقت میں سورج کی بلندی کے ذریعے وقت معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا تھا۔ قرونِ وسطیٰ میں اسطرلاب کے بعد یہ دوسرا سب سے زیادہ استعمال ہونے والا فلکیاتی آلہ تھا اور عالمِ اسلام میں اس کا ایک اہم استعمال نماز کے اوقات کا تعین تھا۔ [44]. [45]



کارپس کرسٹی کالج مخطوطہ نمبر 283

جغرافیہ

محمد بن موسیٰ الخوارزمی کا تیسرا بڑا کام "کتاب صورۃ الأرض" ہے، جسے انھوں نے 833ء میں مکمل کیا۔ یہ کتاب بطلیموس القلوذی کی کتاب جغرافیہ کا ایک نظرثانی شدہ اور مکمل ایڈیشن ہے۔

اس کتاب میں ایک فہرست شامل ہے جس میں 2402 مقامات کے جغرافیائی مختصات دیے گئے ہیں، جن میں شہر اور دیگر جغرافیائی علامات شامل ہیں اور یہ سب ایک عمومی مقدمہ کے بعد ترتیب دیے گئے ہیں۔ [46]

"کتاب صورۃ الأرض" کا صرف ایک ہی نسخہ موجود ہے، جو جامعہ اسٹر اسبورگ کی لائبریری میں محفوظ ہے، جبکہ اس کا لاطینی ترجمہ قومی کتب خانہ ہسپانیہ میں موجود ہے۔ اس کتاب کا مکمل عنوان یہ ہے: "کتاب صورۃ الأرض من المدن والجبال والبحار والجزائر والانہار، جسے ابو جعفر محمد بن موسیٰ خوارزمی نے بطلیموس قلوذی کی کتاب جغرافیہ سے اخذ کیا" اور اس کے نسخے کی نقل و تصحیح ہانس فون مژیک نے کی۔

کتاب کا آغاز طول البلد اور عرض البلد کی فہرست سے ہوتا ہے، جو "مناخی علاقوں" یعنی عرض بلد کے خطوں کے لحاظ سے مرتب کی گئی ہے اور ہر علاقے میں طول البلد کی ترتیب دی گئی ہے۔ جیسا کہ پال جالیز نے اشارہ کیا ہے، یہ بہترین نظام ہمیں بہت سے عرض البلد اور طول البلد اخذ کرنے کی اجازت دیتا ہے، کیونکہ ہمارے پاس موجود واحد نسخہ خراب حالت میں ہے جس کی وجہ سے وہ عملاً ناقابلِ مطالعہ ہو چکا ہے۔



دریائے نیل کے بہاؤ کی نمائندگی؛ اوپر کی جانب جنوب ہے، جہاں دریا کا منبع ہے اور نیچے ڈیلٹا اور بحیرۂ روم واقع ہیں۔ متوازی افقی خطوط اُس زمانے کے "مناخات" (عرض بلد کی پٹیاں) کی نمائندگی کرتے ہیں، یعنی اوپر سے نیچے: خطِ استوا، مرو، اسوان اور اسکندریہ۔



"جزیرہ الجوہَرہ" (خیالی جزیرہ) — کتاب صورۃ الأرض از الخوارزمی سے

نہ عربی نسخے میں اور نہ لاطینی ترجمے میں خود نقشۂ عالم شامل ہے، لیکن ہوبرٹ دانشت نے ان مختصات کی فہرست کی بنیاد پر گم شدہ نقشے کو دوبارہ تعمیر کیا۔ دانشت نے مخطوطے میں موجود مقامات کے ساحلی عرض البلد اور طول البلد کو پڑھا یا جہاں متن واضح نہیں تھا وہاں سیاق و سباق سے اخذ کیا۔ پھر اس نے ان نقاط کو گراف کاغذ پر منتقل کیا اور سیدھی خطوط کے ساتھ جوڑ کر اصل نقشے کے مطابق ساحل کی ایک قریب ترین شکل حاصل کی۔ بعد ازاں اسی طریقے کو دریاؤں اور شہروں پر بھی لاگو کیا۔[47]



ازبکستان کا ڈاک ٹکٹ (2012ء) جس پر محمد بن موسیٰ خوارزمی کی تصویر موجود ہے۔

محمد بن موسیٰ خوارزمی نے بطلیموس کی اس رائے کی اصلاح کی جس میں بحیرۂ روم کی طولی وسعت (جزرِ کینری سے مشرقی ساحل تک) کو ضرورت سے زیادہ بڑھا کر بیان کیا گیا تھا۔ بطلیموس نے اسے 63 درجۂ طول قرار دیا تھا، جبکہ خوارزمی کے مطابق یہ حقیقت کے زیادہ قریب، تقریباً 50 درجۂ طول ہے۔[48] انھوں نے بحرِ اوقیانوس اور بحرِ ہند کو کھلے سمندروں کے طور پر بیان کیا، نہ کہ بطلیموس کی طرح انھیں ساحلوں سے گھری ہوئی بند جھیلیں قرار دیا۔ اس طرح خوارزمی نے قدیم دنیا کے لیے طول البلد کا مرکزی نقطہ بحیرۂ روم کے مشرقی ساحل پر مقرر کیا، جو اسکندریہ کے پرانے بطلیموسی خطِ صفر سے 10 تا 13 درجے مشرق میں تھا اور بغداد کے مغرب میں تقریباً 70 درجے کے فاصلے پر واقع تھا۔ قرونِ وسطیٰ کے بیشتر مسلم جغرافیہ دانوں نے اسی خوارزمی کے مقرر کردہ خطِ طول کو بنیادی معیار کے طور پر اختیار کیا۔[48]

دیگر تصانیف

برلن، استنبول ، تاشقند، قاہرہ اور پیرس میں متعدد عربی مخطوطات ایسے مواد پر مشتمل ہیں جو یقینی یا ممکنہ طور پر خوارزمی سے منسوب ہیں۔ استنبول کا ایک مخطوطہ شمسی گھڑیوں سے متعلق ایک ورق پر مشتمل ہے، جس کا ذکر کتاب الفہرست میں بھی ملتا ہے۔ دیگر اوراق، جیسے قبلہ (مکہ مکرمہ کی سمت) کے تعین سے متعلق ایک ورق، کروی علمِ فلکیات سے تعلق رکھتا ہے۔

دو نصوص ایسے مسائل سے متعلق ہیں جن میں صبح کے وقت کی طولی حسابات شامل ہیں، یعنی: (1) ہر شہر میں مشرق کے وقت کی پہچان (2) بلندی کے ذریعے سمت (سمت از ارتفاع) کا تعین اسی طرح انھوں نے اسطرلاب کی تیاری اور استعمال پر بھی دو کتابیں تصنیف کیں۔ ابن ندیم نے اپنی کتاب الفہرست میں ان کا ذکر کیا ہے: "کتاب المزولات" اور "کتاب التاریخ"، لیکن یہ دونوں کتابیں اب مفقود ہیں۔

ہماری موجودہ ریاضی کی بنیاد بڑی حد تک خوارزمی کے کاموں سے جڑی ہے۔ ان کی کتاب "حساب الجبر والمقابلہ" میں خطی اور درجی مساوات، تجارتی توازن، وراثت کے مسائل اور زمین کی پیمائش و تقسیم جیسے مسائل شامل ہیں۔ اسی کتاب کے ذریعے انھوں نے عددی نظام کو فروغ دیا جو آج استعمال ہوتا ہے اور جس نے قدیم رومی عددی نظام کو تبدیل کر دیا۔ اسی طرح "مفاتیح العلوم" بھی ان سے منسوب کتب میں شامل ہے۔[49]



محمد بن موسیٰ خوارزمی کی 1200ویں سالگرہ کے موقع پر 1983ء میں سوویت یونین کی طرف سے ایک ڈاک ٹکٹ جاری کیا گیا۔.

مزید دیکھیے

- خطیب خوارزمی

ملاحظات

1. مصنف: سونیا برینٹجیس — عنوان : Khwārizmī: Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī
2. عنوان : Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi
3. عنوان : Gemeinsame Normdatei — جی این ڈی آئی ڈی: https://d-nb.info/gnd/118676180 — اخذ شدہ بتاریخ: 15 اکتوبر 2015 — اجازت نامہ: CC0
4. عنوان : Gemeinsame Normdatei — جی این ڈی آئی ڈی: https://d-nb.info/gnd/118676180 — اخذ شدہ بتاریخ: 13 دسمبر 2023 — اجازت نامہ: CC0
5. عنوان : Gemeinsame Normdatei — ربط: https://d-nb.info/gnd/118676180 — اخذ شدہ بتاریخ: 30 دسمبر 2014 — اجازت نامہ: CC0
6. عنوان : Gemeinsame Normdatei — جی این ڈی آئی ڈی: https://d-nb.info/gnd/118676180 — اخذ شدہ بتاریخ: 20 اپریل 2026 — اجازت نامہ: CC0
7. مصنف: فرانس کا قومی کتب خانہ — عنوان : اوپن ڈیٹا پلیٹ فارم — بی این ایف - آئی ڈی: https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb122220627 — اخذ شدہ بتاریخ: 10 اکتوبر 2015

8. هناك بعض الالتباس في الكتابات حول ما إذا كان الاسم الكامل للخوارزمي هو أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي أو أبو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي ويلاحظ ان ابن خلدون في عمل موسوعي : "إن أول من كتب على هذا الفرع (الجبر) كان أبو عبد الله الخوارزمي، الذي جاء بعد أبو كمال شجاع بن أسلم". (MacGuckin de Slane). (Rosen 1831, pp. xi–xiii)، يذكر أن "أبو عبد الله محمد بن موسى عاش وكتب تحت حكم الخليفة المأمون، لذلك يجب التمييز بين أبي جعفر محمد بن موسى، وأيضا، عالم الرياضيات والفلك، الذي تأنق في ظل الخليفة المعتضد (الذي حكم 279-289 ه، م 892-902). " ويشير كاربينسكي في استعراضه على (Ruska 1917) أن (Ruska 1918) : "عن غير قصد Ruska هنا يتحدث المؤلف أبو ' Gå الآن ب م. م، وبدلا من أبي عبد الله (ب) م. أ

9. "مفاتِحُ الـجَزْم في مُشكِلاتِ لَفظِ "خوارَزْم" ". معهد المخطوطات العربية | The Institute of Arabic Manuscripts (بزبان عربی). 6 اپریل 2021. 2023-08-10 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا۔ اخذ شدہ بتاریخ 2025-11-01

10. "المستشار اللغوي". almustashar.ksaa.gov.sa۔ اخذ شدہ بتاریخ 2025-11-01

11. George Saliba (ستمبر 1998)۔ "Science and medicine"۔ Iranian Studies۔ ج 31 شمارہ 3–4: 681–690۔ DOI:10.1080/00210869808701940۔ ISSN:0021-0862۔ "Take, for example, someone like Muhammad b. Musa al-Khwarizmi (fl. 850) who may present a problem for the EIr, for although he was obviously of Persian descent, he lived and worked in Baghdad and was not known to have produced a single scientific work in Persian."

12. Toomer 1990; Jeffrey A. Oaks. "Was al-Khwarizmi an applied algebraist?"۔ یونیورسٹی آف انڈیانا پولس۔ 22 یولیو 2012 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا۔ اخذ شدہ بتاریخ 2008-05-30 ; Jan P. Hogendijk (1998). "al-Khwarzimi"۔ Pythagoras۔ ج 38 شمارہ 2: 4–5۔ ISSN:0033-4766۔ 2016-04-18 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا

13. باربناباس هيوز. قال روبرت تشستر من الترجمة اللاتينية القاعدة Khwarizmi 'sآل جبر : طبعة جديدة حاسمة. في اللاتينية. واو شتاينر Verlag فيسبادن (1989). ردمك 3-515-04589-9 (tel:3-515-04589-9).

14. Toomer 1990

15. Struik93

16. Daffa 1977

17. Knuth, Donald (1979). Algorithms in Modern Mathematics and Computer Science (PDF)۔ سپرنجر۔ ISBN:3-11157-387-0۔ 2009-03-05 کو اصل (PDF) سے آرکائیو کیا گیا

18. "Al-Khwārizmī," Microsoft Encarta Online Encyclopedia 2009 (https://web.archive.org/web/20090125214045/http://encarta.msn.com/encyclopedia_761560322/al-Khw%C4%81rizm%C4%AB_Muhammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81.html) آرکائیو شدہ (https://web.archive.org/web/20200318161522/https://web.archive.org/web/20090125214045/http://encarta.msn.com/encyclopedia_761560322/al-Khwārizmī_Muhammad_ibn_Mūsā.html) 2020-03-18 بذریعہ وے بیک مشین

19. "Al-Khwārizmī" Britannica Kids Students 2019 (https://kids.britannica.com/students/article/al-Khwarizmi/311992) آرکائیو شدہ (https://web.archive.org/web/20171006014153/http://kids.britannica.com/students/article/al-Khwarizmi/311992) 2017-10-06 بذریعہ وے بیک مشین

20. Boyer, Carl B. (1991). "The Arabic Hegemony". A History of Mathematics (الطبعة Second Edition). John Wiley & Sons, Inc. صفحة 228. ISBN 0-471-54397-7.

21. سانچہ:استشهاد بموسوعة

22. رشدي راشد، وتطوير الرياضيات العربية: بين الحساب والجبر، لندن، 1994. ص33

23. Henry Corbin (1998). The Voyage and the Messenger: Iran and Philosophy (بزبان انگریزی). North Atlantic Books. p. 44. ISBN:978-1-55643-269-9. Archived from the original on 19 يناير 2020.
24. Clifford A. Pickover (2009). The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics. Sterling Publishing Company, Inc.. ص 84. ISBN:978-1-4027-5796-9. 30-03-2017 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا
25. George Saliba (ستمبر 1998). "Science and medicine". Iranian Studies. ج 31 شماره 3–4: 681–690. DOI:10.1080/00210869808701940. "Take, for example, someone like Muhammad b. Musa al-Khwarizmi (fl. 850) who may present a problem for the EIr, for although he was obviously of Persian descent, he lived and worked in Baghdad and was not known to have produced a single scientific work in Persian."
26. محمد بن موسى الخوارزمي. كتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة (1937). مطبعة بول باربيه. ص 11
27. "al-Khwarizmi". موسوعة بريتانيكا. 05 يناير 2008 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا۔ اخذ شدہ بتاریخ 30-05-2008
28. Karpinski, L. C. (5 جنوری 1912). "History of Mathematics in the Recent Edition of the Encyclopædia Britannica". الجمعية الأمريكية لتقدم العلوم
29. Carl B. Boyer (1991). "The Arabic Hegemony". A History of Mathematics (Second Edition ایڈیشن). John Wiley & Sons, Inc.. ص 228. ISBN:0471543977. 11-06-2022 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا {{حوالہ کتاب}}: | طبعة= يحتوي على نص زائد (معاونت)

> "The Arabs in general loved a good clear argument from premise to conclusion, as well as systematic organization — respects in which neither Diophantus nor the Hindus excelled."

30. (Boyer 1991، "The Arabic Hegemony" p. 229) "انه ليس من المؤكد ما شروط الجبر والمقابله يعني، ولكن التفسير المعتاد مماثلة لتلك التي تنطوي عليها ترجمة أعلاه. كلمة الجبر من المفترض أن تعني شيئا مثل "استعادة" أو "استكمال"، ويبدو أن أشير إلى نقل تطرح شروطا على الطرف الآخر من المعادلة هي كلمة مقابلة ان الإشارة إلى "الحد من" أو "توازن" -- من ذلك، مثل إلغاء أحكام على طرفي نقيض في المعادلة".
31. فلوريان كاجوري (1919). A History of Mathematics. Macmillan. ص 103. 1 أبريل 2019 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا۔ "That it came from Indian source is impossible, for Hindus had no rules like "restoration" and "reduction". They were never in the habit of making all terms in an equation positive, as is done in the process of "restoration"."
32. كارل بنجامين بوير (1968). A History of Mathematics. ص 252. 10 أغسطس 2019 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا
33. جان جے۔ اوکونر؛ ایڈمنڈ ایف۔ روبرٹسن، "محمد بن موسیٰ خوارزمی"، مک ٹیوٹر ہسٹری آف میتھ میٹکس آرکائیو، یونیورسٹی آف سینٹ اینڈریوز.
34. R. Rashed؛ Angela Armstrong (1994). The Development of Arabic Mathematics. Springer. ص 11–2. ISBN:0792325656. OCLC:29181926
35. Berggren 1986, p. 7
36. Burnett 2017, p. 39

37. "Algoritmi de numero Indorum". Trattati D'Aritmetica. Rome: Tipografia delle Scienze Fisiche e Matematiche. 1857. ص 1–
38. John N. Crossley؛ Alan S. Henry (1990). Thus Spake al-Khwārizmī: A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii.vi.5. ج 17. ص 103–131. DOI:10.1016/0315-0860(90)90048-
I {{حوالہ کتاب}}: | جریدہ= تُجوهل (معاونت)
39. Kennedy 1956, pp. 26–29
40. Kennedy 1956, pp. 26–9
41. (King 1999a, pp. 168-9)
42. ديفيد أ الملك (2002)، "Vetustissimus العربية نص على Quadrans Vetus"، مجلة لتاريخ علم الفلك **33** : 237-255 (238-9)
43. ديفيد أ الملك، "علم الفلك الإسلامي"، وكريستوفر ووكر (1999)، والطبعة، و علم الفلك قبل التلسكوب، p. 167-168. المتحف البريطاني برس. ردمك 0-7141-2733-7 (tel:0-7141-2733-7).
44. (King 1999a, pp. 167-8)
45. (King 2002, pp. 237-238)
46. "The history of cartography". GAP computer algebra system. 09 أغسطس 2017 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا۔ اخذ شدہ بتاریخ 30-05-2008
47. Daunicht
48. س ادوارد كينيدي، الرياضيات والجغرافيا، (Rashed & Morelon 1996, pp. 185–201)، p. 188
49. Walter Mignolo. The darker side of the Renaissance: literacy, territoriality, and colonization (https://books.google.com/books?id=egZOSL_5248C&pg=PA201&lpg=PA201&dq=%22a+Persian+scholar+by+the+name+of+Al-Khwarizmi+%22&source=bl&ots=iN5ZPNABQl&sig=ts5HqJudLM8ZLJn9z2Rsx9eJBYA&hl=en&sa=X&ei=dRwdT9WJBMXJhAeOxf3ZDA&ved=0CB8Q6AEwAA#v=onepage&q=%22a%20Persian%20scholar%20by%20the%20name%20of%20Al-Khwarizmi%20%22&f=false). page 201. آرکائیو شدہ (https://web.archive.org/web/20200126154950/https://books.google.com/books?id=egZOSL_5248C&pg=PA201&lpg=PA201&dq=%22a+Persian+scholar+by+the+name+of+Al-Khwarizmi+%22&source=bl&ots=iN5ZPNABQl&sig=ts5HqJudLM8ZLJn9z2Rsx9eJBYA&hl=en&sa=X&ei=dRwdT9WJBMXJhAeOxf3ZDA&ved=0CB8Q6AEwAA) 2020-01-26 بذریعہ وے بیک مشین

دیگر مصادر

السيرة الذاتية

- Gerald Toomer (1990). Gillispie, Charles Coulston (مدير). Al-Khwārizmī, Abu Jaʿfar Muḥammad ibn Mūsā. New York: Charles Scribner's Sons. ج 7. ISBN:0-684-16962-2. 02-07-2016 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا {{حوالہ کتاب}}: نامعلوم پیرامیٹر |دائرۃ المعارف= رد کیا گیا (معاونت)
- Douglas Morton Dunlop (1943). Muḥammad b. Mūsā al-Khwārizmī. Cambridge University. ص 248–250 {{حوالہ کتاب}}: |جریدہ= تُجوهل (معاونت)

- جان جے۔ اوکونر؛ ایڈمنڈ ایف۔ روبرٹسن، "Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi"، مک ٹیوٹر ہسٹری آف میتھ میٹکس آرکائیو، یونیورسٹی آف سینٹ اینڈریوز.
- Fuat سیزغین. Geschichte دیس arabischen Schrifttums. 1974، اکساجولا بریل، لیدن، هولندا.
- سیزغین، F. الطبعة الإسلامية والرياضيات و علم الفلك، فرانكفورت: معهد für Geschichte در arabisch - islamischen Wissenschaften، 1997-9.

الجبر

- Solomon Gandz (نومبر 1926). <437:The Origin of the Term "Algebra">2.0.CO;2-0 "TOOTT"۔ ج 33. ص 437–440. DOI:10.2307/2299605۔ آئی ایس ایس این 0002-9890. 04-04-2020 کو <437:TOOTT">2.0.CO;2-0 اصل سے آرکائیو کیا گیا {{حوالہ کتاب}}: | جریدہ= تُجوهل (معاونت)
- Solomon Gandz (1936). <263:The Sources of al-Khowārizmī's Algebra>2.0.CO;2-3 TSOAA۔ ج 1. ص 263–277. DOI:10.1086/368426۔ آئی ایس ایس این 0369-7827. 04-04-2020 کو <263:TSOAA>2.0.CO;2-3 اصل سے آرکائیو کیا گیا {{حوالہ کتاب}}: | جریدہ= تُجوهل (معاونت)
- Solomon Gandz (1938). <319:The Algebra of Inheritance: A Rehabilitation of Al-Khuwārizmī>2.0.CO;2-2 TAOIAR۔ ج 5. ص 319–391. DOI:10.1086/368492۔ آئی ایس ایس این 0369-7827. 04-04-2020 کو <319:TAOIAR>2.0.CO;2-2 اصل سے آرکائیو کیا گیا {{حوالہ کتاب}}: | جریدہ= تُجوهل (معاونت)
- Barnabas Hughes (1986). "Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's al-Jabr: A Critical Edition". Mediaeval Studies. ج 48: 211–263
- برناباس هيوز. قال روبرت تشستر من الترجمة اللاتينية القاعدة 's Khwarizmiآل جبر: طبعة جديدة حاسمة. في اللاتينية. واو شتاينر Verlag فيسبادن (1989). ردمك 3-515-04589-9.
- L. C. Karpinski (1915). Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarizmi: With an Introduction, Critical Notes and an English Version. The Macmillan Company. 2017-12-30 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا
- Fredrick Rosen (1831). The Algebra of Mohammed Ben Musa. Kessinger Publishing. ISBN 1-4179-4914-7. 06-12-2022 کو اصل سے آرکائیو کیا گیا
- يوليوس روسكا. Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst {{حوالہ کتاب}}: | جریدہ= تُجوهل (معاونت)

حسابي

- Menso Folkerts (1997). Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Ḫwārizmī (بزبان German and Latin). München: Bayerische Akademie der Wissenschaften. ISBN 3-7696-0108-4.

علم الفلك

- Commentary on the Astronomical Tables of Al-Khwarizmi: By Ibn Al- .B. R. Goldstein (1968) 0300004982:ISBN .Yale University Press .Muthanna
- Al-Khwārizmī's Table of the "Sine of the Hours" and the Underlying Sine" .Jan P. Hogendijk (1991) 12–1 :42 ج .Historia Scientiarum ."Table
- Al-Khwārizmī and New Trends in Mathematical Astronomy in the .David A. King (1983) New York University: Hagop Kevorkian Center for Near Eastern Studies: .Ninth Century ترچھے یا جلی خط کا استعمال ممنوع :{ {حوالہ کتاب} } LCCN:سانچہ .Occasional Papers on the Near East 2 ہے: | ناشر= (معاونت)
- The Astronomical Tables of al-Khwarizmi .Otto Neugebauer (1962)
- Geometric trigonometry" in" " .(مدير) Menso Folkerts and J. P. Hogendijk .Boris A. Rosenfeld (1993) Vestiga mathematica: Studies in ."treatises of al-Khwārizmī, al-Māhānī and Ibn al-Haytham .Amsterdam: Rodopi .Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H. L. L. Busard ISBN 90-5183-536-1
- Suter، H. [إيد] : داي astronomischen Tafeln ديس محمد بن موسى Khwârizmî في Bearbeitung در ديس Maslama بن أحمد Madjrîtî und در latein. Übersetzung ديس Athelhard فون باث عوف Grund فون دير Vorarbeiten ألف Bjørnbo und ر Besthorn في 1914 Kopenhagen. Hrsg. und komm. Kopenhagen. ص 288. Repr. 1997 (الإسلامية الرياضيات والفلك. 7 ردمك 3 - 8298 - 4008 - العاشر.
- فان دالين، B. آل Khwarizmi / إعادة النظر في الجداول الفلكية: تحليل معادلة التوقيت.

التقويم العبري

- 59–55 :27 ج .Scripta Mathematica ."Al-Khwārizmī on the Jewish Calendar" .E. S. Kennedy (1964)

الجغرافيا

- Hubert Daunicht (1968–1970). Der Osten nach der Erdkarte al-Ḫuwārizmīs : Beiträge zur historischen Geographie und Geschichte Asiens (بزبان لغة ألمانية). Bonner orientalistische .Studien. N.S.; Bd. 19 .LCCN:سانچہ
- Mitteil. d. k. k. ."Ptolemaeus und die Karten der arabischen Geographen" .Hanz von Mžik (1915) 152 :58 ج .Geogr. Ges. in Wien
- Afrika nach der arabischen Bearbeitung der γεωγραφικὴ ὑφήγησις des Cl." .Hanz von Mžik (1916) Denkschriften d. Akad. d. Wissen. in Wien, Phil.- ."Ptolomeaus von Muh. ibn Mūsa al-Hwarizmi 59 ج ..hist. Kl
- Das Kitāb Ṣūrat al-Arḍ des Abū Ǧaʻfar Muḥammad ibn Mūsā al- .Hanz von Mžik (1926) Leipzig .Ḫuwārizmī
- سانچہ:استشهاد

- یولیوس روسکا (1918). Neue Bausteine zur Geschichte der arabischen Geographie. ج 24. ص 77–81 {{حواله کتاب}}: | جریده= ثُجوهل (معاونت)
- W. Spitta (1879). Ḫuwārizmī's Auszug aus der Geographie des Ptolomaeus. ج 33 {{حواله کتاب}}: | جریده= ثُجوهل (معاونت)

إشارات عامة

لمزيد من الدراسات الكثيرة انظر: تاريخ الرياضيات، والرياضيات في العصور الوسطى في الإسلام، والإسلام في العصور الوسطى في علم الفلك.

.

- J. Lennart Berggren (1986). Episodes in the Mathematics of Medieval Islam. ولاية نيويورك: سبرنجر. ISBN:0-387-96318-9
- Carl B. Boyer (1991). "The Arabic Hegemony". A History of Mathematics (Second Edition ایڈیشن). John Wiley & Sons, Inc.. ISBN:0471543977 {{حواله کتاب}}: | طبعة= يحتوي على نص زائد (معاونت)
- Ali Abdullah al- Daffa (1977). The Muslim contribution to mathematics. لندن: روتليدج. ISBN:0-85664-464-1
- Ahmad Dallal (1999). "Science, Medicine and Technology". در John Esposito (مدیر). The Oxford History of Islam. مطبعة جامعة أكسفورد، ولاية نيويورك
- E.S. Kennedy (1956). A Survey of Islamic Astronomical Tables; Transactions of the American Philosophical Society. فيلادلفيا: الجمعية الأمريكية للفلسفة. ج 46
- David A. King (1999a). "Islamic Astronomy". در Christopher Walker (مدیر). Astronomy before the telescope. المتحف البريطاني Press. ص 143–174. ISBN:0-7141-2733-7
- David A. King (2002). A Vetustissimus Arabic Text on the Quadrans Vetus. ج 33. ص 237–255 {{حواله کتاب}}: | جریده= ثُجوهل (معاونت)
- Dirk Jan Struik (1987). A Concise History of Mathematics (4th ایڈیشن). منشورات دوفر . ISBN:0486602559
- جان جے۔ اوکونر؛ ایڈمنڈ ایف۔ روبرٹسن، "Abraham bar Hiyya Ha-Nasi"، مک ٹیوٹر ہسٹری آف میتھ میٹکس آرکائیو، یونیورسٹی آف سینٹ اینڈریوز۔
- جان جے۔ اوکونر؛ ایڈمنڈ ایف۔ روبرٹسن، "Arabic mathematics: forgotten brilliance?"، مک ٹیوٹر ہسٹری آف میتھ میٹکس آرکائیو، یونیورسٹی آف سینٹ اینڈریوز۔
- رشدي راشد، وتطوير الرياضيات العربية: بين الحساب والجبر، لندن، 1994.

بیرونی روابط

- الخوارزمي - التاريخ المفقود الإسلامية (https://lostislamichistory.com/al-khawarizmi/)

حوالہ جات

ویکی ذخائر پر **محمد بن موسیٰ خوارزمی** سے متعلق سمعی و بصری مواد ملاحظہ کریں۔